

**1° Prueba de Cátedra de Mat 116.**

Lunes 29 de marzo, 2004

Indicaciones:

- Todos los materiales a utilizar durante la prueba son de uso individual.
- Dispone de 10 minutos para hacer preguntas sobre la redacción de los ejercicios.
- El tiempo total para resolver la prueba es de 90 minutos.
- Cada pregunta tiene 15 puntos en total.
- Justifique todas sus respuestas.
- Sea claro y ordenado en sus desarrollos.
- NO se permite el uso de calculadora gráfica ni tampoco de formulario.

1. Grafique cada una de las regiones siguientes:

a.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 7)^2 < 8(y - 1)\}$

b.  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 16x^2 + y^2 - 96x - 4y + 132 \leq 0\}$

c.  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ((x - 7)^2 < 8(y - 1)) \wedge (16x^2 + y^2 - 96x - 4y + 132 \leq 0)\}$

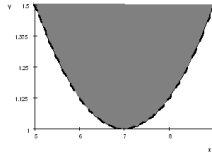
2. Encuentre el lugar geométrico de todos los puntos en que su distancia al punto  $(5, -1)$  sea el doble que su distancia a la recta vertical que pasa por  $(2, 1)$ . Describa a que cónica corresponde y cuáles son sus elementos principales.
3. Determine las condiciones para  $a \in \mathbb{R}$ , de modo que la circunferencia con centro en el origen y radio 1 no interseque a la recta de pendiente  $-1$  que pasa por el punto  $(0, a)$ .
4. El arco de una ventana de una iglesia tiene forma parabólica vertical hacia abajo. La altura del arco, por el punto medio es de 16 metros y el ancho de la base es de 8 metros. Se desea pasar una caja rectangular, deslizándose a través de la ventana. Si la caja tiene una altura de 12 metros, ¿Cuál es el máximo ancho posible que puede tener la caja?

## Desarrollo

1. Grafique cada una de las regiones siguientes:

a.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 7)^2 < 8(y - 1)\}$

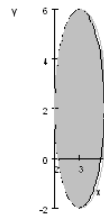
La figura cooresponde a una parábola vertical con centro en  $(7, 1)$  sin su borde.



b.

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 16x^2 + y^2 - 96x - 4y + 132 \leq 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 16(x^2 - 6x) + y^2 - 4y \leq -132\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 16(x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 16\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 3)^2 + \frac{(y - 2)^2}{16} \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

La figura corresponde a la parte interior de una elipse vertical, centrada en  $(3, 2)$ , incluyendo su borde.



c.  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ((x - 7)^2 < 8(y - 1)) \wedge (16x^2 + y^2 - 96x - 4y + 132 \leq 0)\}$



2. Encuentre el lugar geométrico de todos los puntos en que su distancia al punto  $(5, -1)$  sea el doble que su distancia a la recta vertical que pasa por  $(2, 1)$ . Describa a que cónica corresponde y cuáles son sus elementos principales.

Dado que la recta vertical que pasa por  $(2, 1)$  tiene por ecuación a  $x = 2$ , el lugar geométrico  $\mathcal{H}$  pedido corresponde al conjunto siguiente:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-5)^2 + (y+1)^2} = 2|x-2| \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-5)^2 + (y+1)^2 = 4(x-2)^2 \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y+1)^2 - 3(x-1)^2 = -12 \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{12} = 1 \right\}\end{aligned}$$

que corresponde a una hipérbola horizontal con centro en  $(1, -1)$  vértices en  $V_1 = (-1, -1)$ ;  $V_2 = (3, -1)$ , focos en  $F_1 = (-3, -1)$ ;  $F_2 = (5, -1)$  y asíntotas  $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3} - 1$ ;  $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 1$

3. Determine las condiciones para  $a \in \mathbb{R}$ , de modo que la circunferencia con centro en el origen y radio 1 no interseque a la recta de pendiente  $-1$  que pasa por el punto  $(0, a)$ .

El problema se reduce a determinar para qué valores  $a \in \mathbb{R}$ , no tiene solución el sistema

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

$$x + y = a \quad (2)$$

De (2) tenemos que  $y = a - x$ . Reemplazando en (1) :  $2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ , luego:

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 8(a^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 8(a^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow a^2 > 2$$

$$\Leftrightarrow |a| > \sqrt{2} \Leftrightarrow a > \sqrt{2} \vee a < -\sqrt{2}$$

$$\therefore a \in ]-\infty; -\sqrt{2}[ \cup ]\sqrt{2}; \infty[$$

4. El arco de una ventana de una iglesia tiene forma parabólica vertical hacia abajo. La altura del arco, por el punto medio es de 16 metros y el ancho de la base es de 8 metros. Se desea pasar una caja rectangular, deslizándose a través de la ventana. Si la caja tiene una altura de 12 metros, ¿Cuál es el máximo ancho posible que puede tener la caja?

Como la ventana tiene forma de parábola, tenemos que su ecuación es de la forma:

$$(x-h)^2 = 4c(y-k)$$

con  $c < 0$ , ya que es abierta hacia los negativos.

Si fijamos el origen en el centro de la base de la ventana, el vértice de dicha parábola es el punto  $(0, 16)$ . Además la parábola pasa por los extremos de la ventana que corresponden a los puntos  $(-4, 0)$  y  $(4, 0)$ . Por esto tenemos que la ecuación de la parábola es:

$$x^2 = 4c(y - 16)$$

y reemplazando en  $(4, 0)$  se tiene que

$$16 = 4c(-16) \Rightarrow c = -1/4$$

por lo que la ecuación es

$$x^2 = -(y - 16)$$

Luego al centrar la caja de 12 metros de alto, y ancho  $2x$ , esta tocará la ventana en los puntos  $(-x, 12)$  y  $(x, 12)$ . Reemplazando en la ecuación, vemos que:

$$x^2 = -(12 - 16) \Rightarrow x = -2 \vee x = 2$$

por lo que el ancho máximo de la caja es de 4 metros.